УДК 517.983.23

В.Б. ВАСИЛЬЕВ, О.А. ТАРАСОВА

V.B. VASILYEV, О.А. TARASOVA

**О ДИСКРЕТНЫХ РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**ON DISCRETE SOLUTIONS FOR ELLIPTIC PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

*Рассматривается дискретный аналог простейшей краевой задачи для эллиптического псевдодифференциального уравнения в полупространстве с граничным условием Дирихле в пространствах Соболева-Слободецкого. На основе теории дискретных краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений приведено сравнение дискретных и непрерывных решений для одной модельной краевой задачи.*

*Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, дискретное решение, дискретная краевая задача, скорость аппроксимации.*

W*e consider discrete analogue for simplest boundary value problem for elliptic pseudo-di fferential equation in a half-space with Dirichlet boundary condition in Sobolev-Slobodetskii spaces. Based on the theory of discrete boundary value problems for elliptic pseudo-differential equations we give a comparison between discrete and continuous solutions for certain model boundary value problem.*

*Keywords: Digital pseudo-differential operator, Discrete solution, Discrete boundary value problem, Rate of approximation*.

Пусть - целочисленная решетка в , – дискретный псевдодифференциальный оператор с символом определенный на функциях дискретного аргумента , .

Исследуется дискретное уравнение

(1)

его разрешимость и аппроксимационные свойства для малых значений h.

Обозначим - дискретным аналогом пространство Шварца

**Определение 1.** Пространство является замыканием пространства по норме

где

Далее, пусть - область, и - дискретная область.

**Определение 2.** Пространствосостоит из функций дискретного аргумента из носитель которых содержится в . Норма в пространстве индуцируется нормой пространства Пространство состоит из функций дискретного аргумента и эти функции должны допускать продолжение во все . Норма задается формулой

где берется по всем продолжениям

Будем рассматривать класс символов , который включает в себя символы, удовлетворяющие следующему условию

с положительными константами не зависящими от h и символа

Обозначим

**Определение 3.** Периодической факторизацией эллиптического символа называется его представление в виде

где сомножители допускают аналитическое продолжение в полуполосы по последней переменной для почти всех фиксированных и удовлетворяют оценкам

с константами , не зависящими от ,

Число называется индексом периодической факторизации.

Такое представление полностью определяет картину разрешимости уравнения (1).

Во-первых, для эллиптического символа такая периодическая факторизация существует всегда (см. [2, 3]).

Во-вторых, индекс периодической факторизации определяет, сколько дополнительных условий требуется для решения или для правой части [1, 4].

В-третьих, уравнение (1) однозначно разрешимо в дискретном полупространстве для произвольной правой части при условии

(2)

Рассмотрим более сложный случай, когда условие (2) не выполняется. В этой ситуации есть две возможности, и мы рассмотрим один случай, который приводит к типичным краевым задачам. Мы используем результат из [1] в простейшей форме.

**Теорема 1.** Пусть Тогда образ Фурье для ядра оператора состоит из следующих функций

где произвольные функции из

Справедлива априорная оценка

,

где обозначает норму в пространстве и постоянная а не зависит от h.

Здесь и ниже мы рассмотрим псевдодифференциальные операторы с символами Aудовлетворяющие условию

Далее, символ будет определен следующим образом. Мы берем сужение A на куб и периодически продолжаем его на все . Мы рассматриваем такой оператор как аппроксимирующий оператор для A. Для произвольной функции u обозначение будет обозначать иакую же конструкцию. Так, например, чтобы найти приближенное дискретное решение уравнения

для будем использовать следующее дискретное решение

так что нам не нужно искать приближенное решение для конечной системы линейных алгебраических уравнений. Для нашего случая нам нужно применить любые кубатурные формулы для вычисления последнего интеграла и кубатурную формулу для вычисления преобразования Фурье . Для дискретное решение стремится к очень быстро при [5].

Рассмотрим случай . Согласно теореме 1 ядро оператора содержит только одну произвольную функцию, так что нам нужно одно дополнительное условие.

Непрерывный аналог дискретной краевой задачи

(3)

(4)

выглядит следующим образом

(5)

(6)

где A псевдодифференциальный оператор с символом A Чтобы получить сравнение между дискретными и непрерывными решениями, напомним, как выглядит непрерывное решение. Если индекс факторизации равен æ и , то единственное решение задачи (5), (6) строится по формуле

где являются элементами факторизации символа A [2],

предполагаем, что Отметим, что это простейший вариант условия Шапиро-Лопатинского [2].

Имеем следующее дискретное решение [3]

,

для которого мы выбираем специальные приближения. Берем и мы выбираем как сужения на Периодический символ

удовлетворяет всем условиям периодической факторизации с тем же индексом æ. Более того и совпадает с и соответственно на

**Теорема 2.** Пусть Сравнение решений задач (3), (4) и (5), (6) дается следующим образом

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Vasilyev, A.V., Vasilyev, V.B. - Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space. - Math. Model. Anal. 23(3), 492–506, 2018.

2. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.

3. Vasilyev, A.V., Vasilyev, V.B. - On some discrete boundary value problems in canonical domains. - In: Pinelas, S., Caraballo, R., Kloeden, P., Graef, J. R. (eds.) Differential and Difference Equations and Applications. ICDDEA, Amadora, Por- tugal, June 2017. Springer Proc. Math. & Stat. V. 230, pp.569–579, Springer, Cham, 2018.

4. Vasilyev, A.V., Vasilyev, V.B. - On some discrete potential like operators. - Tatra Mt. Math. Publ. 71, 195–212, 2018.

5. Vasilyev, V.B. - Digital approximations for pseudo-differential equations and error estimates. In: Nikolov, G., Kolkovska, N., Georgiev, K. (eds.) Numerical Methods and Applications. NMA 2018. LNCS, vol 11189, pp. 483–490. Springer, Cham, 2019.

**Васильев Владимир Борисович**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

г. Белгород.

Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования.

E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

**Тарасова Оксана Александровна**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

г. Белгород.

Старший преподаватель кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования.

E-mail: tarasova\_o@bsu.edu.ru